

9.7#22

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 4t \\ -4t-2 \end{bmatrix} \quad (a) X(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (b) X(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 8 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -4 \end{matrix}$$

$$\int \tau e^{a\tau} d\tau = \frac{1}{a} \tau e^{a\tau} - \frac{1}{a^2} e^{a\tau}$$

$$\lambda = 2: \begin{bmatrix} -2 & 2 & | & 0 \\ 4 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = -4: \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$FMS: X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-4t} \\ e^{2t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix}, X^{-1}(t) = \frac{1}{-3e^{-2t}} \begin{bmatrix} -2e^{-4t} & -e^{-4t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-4t} \\ e^{2t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix} \cdot X^{-1}(t_0) \cdot X(t_0) + \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-4t} \\ e^{2t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix} \int_{t_0}^t \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^{-2\tau} & e^{-2\tau} \\ e^{4\tau} & -e^{4\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\tau \\ -4\tau-2 \end{bmatrix} d\tau$$

$$\begin{aligned} (a) X(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}, X(t) &= \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-4t} \\ e^{2t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix} \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \int_0^t \begin{bmatrix} 4\tau e^{-2\tau} & -2e^{-2\tau} \\ 4\tau e^{4\tau} & -2e^{4\tau} \end{bmatrix} d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-4t} \\ e^{2t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \left( -\frac{2\tau}{2} e^{-2\tau} - \frac{1}{4} e^{-2\tau} \right) \Big|_0^t + 2 \left( \frac{1}{2} e^{-2\tau} \right) \Big|_0^t \\ 8 \left( \frac{2\tau}{4} e^{4\tau} - \frac{1}{16} e^{4\tau} \right) \Big|_0^t + 2 \left( \frac{1}{4} e^{4\tau} \right) \Big|_0^t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-4t} \\ e^{2t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2te^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ 2te^{4t} - \frac{1}{8} e^{4t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{4t} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-4t} \\ e^{2t} & -2e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 - 2te^{-2t} \\ 9 + 2te^{4t} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3e^{2t} - 2t + 9e^{-4t} + 2t \\ 3e^{2t} - 2t - 18e^{-4t} - 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} + 3e^{-4t} \\ e^{2t} - 6e^{-4t} - 4t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) ...